104016 – אלגברה 1/מ

פתרונות מלאים למבחן סוף סמסטר ב' תשס"ח, מועד ב', 4/11/08

שאלה מס. 1 (30 נקודות)

תהי A המטריצה הממשית $\begin{pmatrix} -4 & 4 & -4 & 4 \\ 4 & -4 & 4 & -4 \\ -4 & 4 & -4 & 4 \\ 4 & -4 & 4 & -4 \end{pmatrix}$.

א. מצא את הפולינום האופייני של A וקבע את הערכים העצמיים שלה.

ב. האם A ניתנת ללכסון? אם לא, נמק מדוע לא, ואם כן נמק מדוע כן, ובנוסף מצא מטריצה אלכסונית D ומטריצה הפיכה P כך ש $P^{-1}AP = D$.

פתרון

א. ניתן לחשב את הפולינום האופייני ע"י חישוב ישיר של $|\lambda I - A|$ אך נשתמש קצת במשפטים מוכרים. קל להבחין כי דרגת A היא 1 ולכן A לא הפיכה ו- $\lambda_1 = 0$ הוא ע"ע של A. נחשב ר"ג שלו:

$n - rank(\lambda I - A) = 4 - rank(0I - A) = 4 - rank(A) = 4 - 1 = 3$ ומכאן כי ר"א של $\lambda_1 = 0$ הוא 3 או 4 וחסר לנו ע"ע נוסף. מאחר וסכום ע"ע שווה לעקבה של A הרי ש:

$trace(A) = 0 + 0 + 0 + \lambda_2 = -16$ ומכאן כי $\lambda_2 = -16$. בנוסף ר"א של $\lambda_2 = -16$ הוא 1 (כי מצאנו כבר את כל הע"ע של A) ולכן גם ר"ג של $\lambda_2 = -16$ הוא 1 וקיבלנו כי לכל ע"ע של A מתקיים: ר"א שווה ר"ג. לכן A לכסינה (עבור סעיף ב'). לפי הע"ע שקיבלנו יוצא כי הפולינום האופייני של A הוא: $f(\lambda) = \lambda^3(\lambda + 16)$ וכאמור הע"ע של A הם: $\lambda_1 = 0$ מריבוי 3 ו- $\lambda_2 = -16$ מריבוי 1.

ב. נמצא P מלכסנת ו- D אלכסונית.

עמודות P הן הו"ע של A.

ו"ע עבור $\lambda_1 = 0$: יש לפתור $A\bar{x} = 0$. המשוואה היחידה היא: $-4x + 4y - 4z + 4w = 0$ כלומר $x = y - z + w$ ו- 3 פתרונות פרטיים הם:

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

ו״ע עבור $\lambda_2 = -16$: יש לפתור $(A+16I)\overline{x} = 0$. בדקו שהפתרון הוא : $\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$

ולכן P ו- D המתאימה ל- P (ע״ע בהתאמה באלכסון) הן :

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{pmatrix} \quad , \quad D = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -16 \end{pmatrix}$$

שאלה מס 2 (30 נקודות)

יהי $V = \mathbb{R}^2$ ויהיו $w = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix}$, $u_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ ו $u_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$.
נתונה טרנספורמציה לינארית T המקיימת $Tu_1 = 2w, Tu_2 = -5w$.

א. חשב את $T(-w)$ ואת $T(w)$.

ב. הוכח ש T^{18} איננה הפיכה.

יהי U מרחב הפולינומים הממשיים ממעלה לכל היותר 1:

$$U = \{ax + b \mid a, b \in \mathbb{R}\}.$$

נתונה טרנספורמציה לינארית $P : U \to U$ ע״י

$$P(x+2) = x+3 \quad , \quad P(2x+1) = 5x+15$$

ג. הוכח ש $Ker(P) = Im(P)$.

ד. הוכח ש $P^{15}(2009x + 2008) = 0$.

פתרון

א. u_1, u_2 הם שני וקטורים בת״ל ב- R^2 שמימדו 2 ולכן הם מהווים סיס ל- R^2 . מכאן כי נתונה ההעתקה T על איברי בסיס לכן נכתוב את w כצירוף ליניארי של הבסיס הנתון ונפעיל T על הצירוף הליניארי :

$$w=\begin{pmatrix}1\\3\end{pmatrix}=3\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}-2\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}$$

$$T(w)=T\begin{pmatrix}1\\3\end{pmatrix}=T\left(3\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}-2\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}\right)=3T\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}-2T\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}=3\begin{pmatrix}2\\6\end{pmatrix}-2\begin{pmatrix}-5\\-15\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}16\\48\end{pmatrix}$$

$$T(-w)=-T(w)=-\begin{pmatrix}16\\48\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-16\\-48\end{pmatrix}$$

ב. ניתן לפתור בכמה דרכים. נציג שתיים:

(i). באמצעות מטריצה מייצגת: נבנה מטריצה מייצגת לפי הבסיס $B=\{u_1,u_2\}$:

$$T(u_1)=2w=2\begin{pmatrix}1\\3\end{pmatrix}=6u_1-4u_2$$

$$T(u_2)=-5w=-5\begin{pmatrix}1\\3\end{pmatrix}=-15u_1+10u_2$$

$$[T]_B=\begin{pmatrix}6 & -15\\-4 & 10\end{pmatrix}$$

יש להוכיח כי T^{18} איננה הפיכה.

לפי משפט, T הפיכה אם"ם המטריצה המייצגת את T לפי בסיס כלשהו היא הפיכה. במקרה שלנו, המטריצה המייצגת את T לפי הבסיס B איננה הפיכה כי הדטרמיננטה שלה שווה ל- 0:

$$\left|[T]_B\right|=\begin{vmatrix}6 & -15\\-4 & 10\end{vmatrix}=6\cdot 10-(-4)\cdot(-15)=0$$

לפי משפט אחר, לכל טבעי k מתקיים: $\left[T^k\right]_B=[T]_B^k$ (תוצאה של המשפט $[T\circ S]_B=[T]_B[T]_S$ כאשר T ו- S אופרטורים ליניאריים מ- V ל- V). מאחר ו- $[T]_B$ איננה הפיכה הרי שגם $\left|[T]_B^k\right|=\left|[T]_B\right|^k=0$ לכן איננה הפיכה ובפרט עבור $k=18$.

(ii) לפי משפט, העתקה ליניארית T היא הפיכה אם"ם היא חח"ע ועל. לכן, כדי להראות ש T לא הפיכה נראה למשל שהיא לא על. לפי משפט אם $\{u_1,\dots,u_n\}$ בסיס של V הרי ש- $\{T(u_1),\dots,T(u_n)\}$ פורש את $\mathrm{Im}(T)$, כאשר $T:V\to U$. במקרה שלנו $\{u_1,u_2\}$ בסיס של $V=R^2$ ולכן $\{T(u_1),T(u_n)\}$ פורשים את $\mathrm{Im}(T)$ שהוא תת מרחב של R^2. מאחר ו- $\{T(u_1),T(u_n)\}$ תלויים ליניארית ו- $\dim\mathrm{Im}(T)=1<2$ הרי ש- T לא על ולכן גם לא הפיכה, ומכאן כי גם T^{18} לא הפיכה כהרכבה של אופרטורים לא הפיכים.

ג. גם במקרה זה $\dim U = 2$ והפולינומים $\{x+2\ ,\ 2x+1\}$ הם בת"ל ולכן מהווים בסיס ל- U.

לפי משפט תמונות הבסיס פורשות את התמונה של P ולכן $\{x+3\ ,\ 5x+15\}$ פורשת את $\operatorname{Im} P$

כלומר $\operatorname{Im} P = span\{x+3\}$ ובנוסף $\dim \operatorname{Im} P = 1$. ממשפט המימדים נקבל $\dim KerP = 1$.

צריך להוכיח כי $\operatorname{Im} P = KerP$. נוכיח באמצעות הכלה ושוויון מימדים: שוויון מימדים כבר קיבלנו ולכן נותר להוכיח כי $\operatorname{Im} P \subseteq KerP$ וזאת נעשה ע"י הפעלת P על איבר בסיס של $\operatorname{Im} P$.

כמו קודם, נתונה P על איברי בסיס של U ולכן נכתוב את $x+3$ כצירוף ליניארי של הבסיס הנתון $\{x+2\ ,\ 2x+1\}$ ונפעיל P:

$$x+3 = \frac{5}{3}(x+2) - \frac{1}{3}(2x+1)$$

$$P(x+3) = P\left(\frac{5}{3}(x+2) - \frac{1}{3}(2x+1)\right) = \frac{5}{3}P(x+2) - \frac{1}{3}P(2x+1) = \frac{5}{3}(x+3) - \frac{1}{3}(5x+15) = 0$$

קיבלנו כי בסיס של $\operatorname{Im} P$ מוכל ב- $KerP$ ולכן מהכלה ושוויון מימדים נובע כי $\operatorname{Im} P = KerP$.

ד. נזכור כי $\operatorname{Im} P = P(U)$ (כלומר התמונה של P היא קבוצת הוקטורים המתקבלים ע"י הפעלת P על כל U). אבל, לפי סעיף ג' מתקיים $\operatorname{Im} P = KerP$ לכן אם נפעיל פעמיים את P נקבל:

$P^2(U) = P(P(U)) = P(\operatorname{Im} P) = P(KerP) = 0$. מאחר ו- $P^2 = 0$ הרי שגם: $P^{15} = 0$ כלומר S^{15} העתקת ה- 0 ובפרט $P^{15}(2009x+2008) = 0$.

הערה: כמובן, ניתן לחשב זאת ישירות ע"י כתיבת $2009x+2008$ באמצעות הבסיס $\{x+2\ ,\ 2x+1\}$. אחרי הפעלת P^2 כבר היינו מקבלים 0 מה שגורר ש- $P^{15}(2009x+2008) = 0$.

שאלה 3 (20 נקודות)

הפרך ע"י דוגמא נגדית או הוכח את הטענות הבאות:

א. אם U ו-W הם תתי מרחב של מרחב וקטורי V עם בסיסים B_1 ו-B_2 בהתאמה אז $B_1 \cup B_2$ הוא בסיס של $U+W$.

ב. אם A ו B הן מטריצות ממשיות 7×7 המקיימות $ABABABA - A = 0$ אז A היא איננה הפיכה.

ג. אם A היא מטריצה מרוכבת 3×3 ו $2-i$ הוא שורש של הפולינום האופיני של A, אז ל A יש ערך עצמי ממשי עם רבוי גאומטרי 2.

ד. המטריצות הממשיות $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 5 & 6 & 4 \\ 9 & 7 & 8 \end{pmatrix}$ ו $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix}$ דומות זו לזו (מעל $\mathbb{R}$).

פתרון:

א. טענה לא נכונה: לפי משפט, אם B_1 ו- B_2 הם שני בסיסים של U ו- W בהתאמה הרי ש- $B_1 \cup B_2$ היא קבוצה פורשת של $U+W$ אך לא בהכרח בסיס שלו.

דוגמא נגדית נבחר: $U = R^2 = span\{(1,0)\ ,\ (0,1)\}$ אז $B_1 = \{(1,0)\ ,\ (0,1)\}$ בסיס של U ונבחר $W = span\{(2,0)\}$ תת מרחב של R^2 אז $B_2 = \{(2,0)\}$ בסיס של W.

מאחר ו- $W \subset U$ הרי ש- $U+W = U = R^2$ והקבוצה $B_1 \cup B_2 = \{(1,0)\ ,\ (0,1)\ ,\ (2,0)\}$ איננה בסיס של $U+W = R^2$ שכן היא תלויה ליניארית ולכן לא יכולה להיות בסיס.

ב. טענה לא נכונה: מהנתון נובע $ABABABA = A$. נחשב דטרמיננטה לשני אגפים ונקבל: $|ABABABA| = |A|$. ממשפט המכפלה נקבל: $|A|^4 |B|^3 = |A|$. נעביר אגפים ונוציא $|A|$ מחוץ לסוגריים ונקבל: $|A|\left(|A|^3 |B|^3 - 1\right) = 0$ ולכן $|A| = 0$ או $|A|^3 |B|^3 = 1$. הטענה תהייה נכונה אם בהכרח $|A| = 0$ אבל מאחר וניתן לבחור $|A|^3 |B|^3 = 1$ או $|A||B| = 1$ הרי שהטענה איננה נכונה.

למשל נבחר $A = I$ ולכן $|A| = |I| = 1$ ו- $B = I$ אז $|B| = |I| = 1$ לכן $|A||B| = 1$ אז A הפיכה ומתקיים:

$$ABABABA - A = I \cdot I \cdot I \cdot I \cdot I \cdot I \cdot I - I = I - I = 0$$

ג. טענה לא נכונה: אם A מרוכבת מסדר 3×3 הרי שהפולינום האופייני של A הוא פולינום עם מקדמים מרוכבים (כי בחישוב הדטרמיננטה $|\lambda I - A|$ כופלים ומחברים מספרים מרוכבים) ממעלה 3 (כסדר המטריצה) מאחר והמקדמים לא בהכרח ממשיים הרי שלא בהכרח הצמוד של $2-i$ הוא גם ע״ע. לא מובטח לנו כלל שורש ממשי ולכן יתכן כי הריבוי האלגברי של $2-i$ שווה ל- 3 למשל:

$$A=\begin{pmatrix} 2-i & 0 & 1 \\ 0 & 2-i & 0 \\ 0 & 0 & 2-i \end{pmatrix}$$

קל לראות כי $2-i$ הוא ע״ע מריבוי אלגברי 3 (כי זו מטריצה משולשת עליונה) וריבוי גיאומטרי 2, ומאחר ואין ע״ע נוספים הרי שאין ע״ע ממשי עם ריבוי גיאומטרי 1.

ד. טענה לא נכונה: לפי משפט למטריצות דומות יש אותה דרגה. קל לבדוק כי המטריצה הימנית היא מדרגה 3 ואילו המטריצה השמאלית היא מדרגה 2 ולכן הן לא דומות.

שאלה מס. 4 (20 נקודות)

הפרך ע"י דוגמא נגדית או הוכח את הטענות הבאות:

א. יהיו $n \geq 7$, ו b מספרים טבעיים. אם A היא מטריצה ממשית $n \times n$ המקיימת $A^t = 3A + bI_n$ אז A^b ניתנת ללכסון.

כאן A^t היא המטריצה המוחלפת של A.

ב. אם A היא מטריצה ריבועית ממשית אנטיסימטרית ו$adj(A)$ הפיכה, אז $adj(A)$ אנטיסימטרית ו A הפיכה.

ג. אם T הוא אופרטור לינארי ב- $\mathbb{R}^3$ המקיים:

$$T(1,2,3) = T(4,5,6) = T(7,8,9) = (0,0,0)$$

אז T הוא אופרטור האפס.

פתרון

א. **טענה נכונה:** נתון $A^t = 3A + bI$ ולכן: $\left(A^t\right)^t = \left(3A + bI\right)^t$ או $A = 3A^t + bI$ נציב את A^t ונקבל: $A = 3(3A + bI) + bI = 9A + 4bI$ כלומר $8A = -4bI$ או $A = -\frac{b}{2}I$ ולכן $A^b = (-\frac{b}{2}I)^b = (-\frac{b}{2})^b I$ ובכל מקרה A^b סקלרית ובפרט אלכסונית ולכן לכסינה.

ב. טענה נכונה: נתון A ממשית ו- $A^t = A$ וכן $adjA$ הפיכה. צריך להוכיח ש- A הפיכה וכן ש- $adjA$ אנטי סימטרית. נוכיח תחילה כי A הפיכה: נניח בשלילה ש- A לא הפיכה אז $|A| = 0$ ולפי משפט נקבל $A \cdot adjA = |A| I = 0$. נתון כי $adjA$ הפיכה לכן נכפול שני אגפים בהופכית של $adjA$ מימין ונקבל $A = 0$ ולכן $adjA = 0$ בסתירה לנתון ש- $adjA$ הפיכה ולכן A הפיכה.

כדי להוכיח כי $adjA$ אנטי סימטרית יש להוכיח כי $\left(adjA\right)^t = -adjA$. כאמור $A \cdot adjA = |A| I$ נכפול משמאל ב A^{-1} שהראנו שקיימת ונקבל $adjA = |A| A^{-1}$ ולכן:

$$\left(adjA\right)^t = \left(|A| A^{-1}\right)^t = |A|\left(A^{-1}\right)^t = |A|\left(A^t\right)^{-1} = |A|\left(-A\right)^{-1} = |A|(-1)^{-1}\left(A\right)^{-1} = -|A| A^{-1} = -adjA$$

ג. טענה לא נכונה: מאחר ו- T איננה מוגדרת על איברי בסיס שכן הקבוצה:

$$\{(1,2,3)\ ,\ (4,5,6)\ ,\ (7,8,9)\}$$

תלויה ליניארית, הרי שנוכל להשלימה לבסיס ולהגדיר את התמונה של וקטור ההשלמה כשונה מ-0 ולקבל העתקה שאיננה העתקת האפס.

דוגמא: מהנתון, $\{(1,2,3)\ ,\ (4,5,6)\ ,\ (7,8,9)\} \subset KerT$. כדי להגדיר העתקה, כדאי לנו לבחור קבוצת וקטורים בגרעין שיותר נוח לעבוד איתם. נדרג את הוקטורים הנתונים ונקבל:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix} \to \cdots \to \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

מאחר $span\{(1,2,3)\ ,\ (4,5,6)\ ,\ (7,8,9)\} = span\{(1,0,-1)\ ,\ (0,1,2)\}$ הרי שגם $\{(1,0,-1)\ ,\ (0,1,2)\} \subset KerT$. מכאן, שניתן להגדיר את T באמצעות הקבוצה $\{(1,0,-1)\ ,\ (0,1,2)\}$. ראשית נשלים אותה לבסיס של R^3 באמצעות הווקטור $(0,0,1)$ ונגדיר:

$$(*) \qquad T(1,0,-1)=0\ \ ,\ \ T(0,1,2)=0\ \ ,\ \ T(0,0,1)=(0,0,1)$$

מאחר ו- $T(1,0,-1)=0\ \ ,\ \ T(0,1,2)=0$ הרי שכל קומבינציה שלהם גם נשלחת ע"י T ל- 0 כלומר אכן מתקיים $T(1,2,3)=T(4,5,6)=T(7,8,9)=0$ כנדרש, אבל $T \neq 0$ כי $T(0,0,1)=(0,0,1)\neq 0$. לפי משפט, מאחר ו- T מוגדרת על בסיס של R^3 הרי שקיימת העתקה ליניארית יחיד T המקיימת את $(*)$.

למרות שלא נדרש ממשש למצוא את T, למען שלמות הפתרון נמצא אותה:

ראשית נכתוב וקטור כללי בצירוף ליניארי של איברי הבסיס ב- $(*)$:

$$(x,y,z)=\alpha(1,0,-1)+\beta(0,1,2)+\gamma(0,0,1)$$

חשבון פשוט ייתן כי: $(x,y,z)=x(1,0,-1)+y(0,1,2)+(x-2y+z)(0,0,1)$, ולכן:

$$T(x,y,z)=T\big(x(1,0,-1)+y(0,1,2)+(x-2y+z)(0,0,1)\big)=$$
$$xT(1,0,-1)+yT(0,1,2)+(x-2y+z)T(0,0,1)=(x-2y+z)(0,0,1)=(0,0,x-2y+z)$$

ולכן העתקה המהווה דוגמא נגדית היא למשל: $T(x,y,z)=(0,0,x-2y+z)$.